Anal. Acad. Nac. Cs. Ex. Fís. Nat., Buenos Aires, tomo 45, 1993

ALGUNAS APLICACIONES DEL METODO DE CUADRATURA DIFERENCIAL EN LA MECANICA ESTRUCTURAL

por Roberto H. Gutiérrez y Patricio A. A. Laura***

Instituto de Mecánica Aplicada (CONICET-SENID-ACCE)

* Profesional Principal, CONICET, Profesor Titular, Depto. de Matemática y Grupo Análisis de Sistemas Mecánicos, Facultad Regional Bahía Blanca, Universidad Tecnológica Nacional
** Investigador Superior, CONICET, Profesor Titular, Depto. de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur

RESUMEN

El método de cuadratura diferencial fue propuesto por Richard Bellman [1] hace más de dos décadas pero ha sido en épocas recientes que algunos autores lo han empleado al resolver diversos problemas de la ciencia aplicada y de la ingeniería [2-8].

En esta publicación se presentan los conceptos básicos del método y se resuelven problemas estáticos, dinámicos y de estabilidad elástica de vigas.

ABSTRACT

The method of differential quadrature was proposed by Richard Bellman [1] early in the 70's but it has been used in the solution of engineering and applied scientific problems rather recently [2-8].

The basic formulation of the technique is presented in this paper and then applied to the solution of static, dynamic and elastic stability problems of elastic beams.

1. INTRODUCCION: FORMULACION DEL METODO DE CUADRATURA DIFERENCIAL EN PROBLEMAS UNI Y BIDIMENSIONALES

Data la ecuación diferencial

$$M(W(x)) = F(x)$$

bajo ciertas condiciones de contorno en un intervalo $[a,b] \subset R^1$, la idea básica es satisfacer con un polinomio

$$P(x) = a_{N-1}\, x^{N-1} + a_{N-2}\, x^{N-2} + \dots + a_1 x + a_o$$

la ecuación y las condiciones mencionadas en N puntos del intervalo,

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$$

Para ello veamos que es posible expresar, en cada punto x_i la derivada de cualquier orden m de $P(x)$ como combinación lineal de los valores $P(x_k)$, es decir

$$\sum_{k=1}^{N} c_{ik}\, P(x_k) = P^{(m)}(x_i) \qquad (1.1)$$

con tal que sea $N > m$. En efecto, escribamos la (1.1) en la forma

$$\sum_{k=1}^{N} \sum_{h=0}^{N-1} c_{ik} a_h x_k^{\,h} = \sum_{h=m}^{N-1} h\,(h-1)\dots(h-m+1)\, a_h x_i^{\,h-m}$$

o bien

$$\sum_{h=0}^{N-1} (c_{i1} x_1^{\,h} + \dots + c_{iN} x_N^{\,h}) a_h = \sum_{h=m}^{N-1} h\,(h-1)\dots(h-m+1) a_h x_i^{\,h-m}$$

Un modo de conseguir que ambos miembros sean iguales, es imponer la igualdad de los respectivos términos correspondientes a cada valor del índice h; procediendo así, los coeficientes c_{ik} se obtienen resolviendo el sistema lineal

$$c_{i1} + \ldots + c_{iN} = 0$$

$$c_{i1}x_1 + \ldots + c_{iN}x_N = 0$$

$$\vdots$$

$$c_{i1}x_1^{m-1} + \ldots + c_{iN}x_N^{m-1} = 0$$

$$c_{i1}x_1^{m} + \ldots + c_{iN}x_N^{m} = m\,(m-1)\ldots 1 \qquad (1.2)$$

$$c_{i1}x_1^{m+1} + \ldots + c_{iN}x_N^{m+1} = (m+1)m\ldots 2x_i$$

$$\vdots$$

$$c_{i1}x_1^{N-1} + \ldots + c_{iN}x_N^{N-1} = (N-1)\,(N-2)\ldots(N-m)x_i$$

el cual tiene solución única pues el determinante de su matriz es de Vandermonde, no nulo dado que $x_1 \neq x_2 \neq \ldots \neq x_N$.

Notemos que los c_{ik} resultan independientes de los coeficientes a_h de $P(x)$. Esto permite, para cada valor de N que se fije, determinar este polinomio de modo que aproxime a la solución $W(x)$ del problema en el intervalo [a,b]. En efecto, reemplazando las derivadas que figuren en el operador M y en las condiciones de contorno por las correspondientes expresiones (1.1), se obtiene un sistema de ecuaciones en las incógnitas $P(x_k)$, el cual será lineal si lo es el problema a resolver. Puesto que estos valores $P(x_k)$ satisfacen la formulación del problema en un conjunto discreto de puntos, cabe esperar que aproximen a los respectivos valores exactos $W(x_k)$, y que cuanto mayor sea el número N de nodos, salvo los efectos de los errores de redondeo, tanto más precisas sean tales aproximaciones. Si fuese necesario, los coeficientes de P(x) pueden ahora calcularse con cualquier método de interpolación.

Si el problema es bidimensional relativo al intervalo

$$\{(x,y) \;/\; a \leq x \leq b,\; c \leq y \leq d\}$$

generalizamos lo dicho hasta ahora efectuando una subdivisión de este intervalo mediante paralelas a los ejes coordenadas, trazadas por los puntos x_i, y_j, tales que

$$a = x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_{N_1} = b$$

$$c = y_1 < \ldots < y_j < \ldots < y_{N_2} = d$$

y considerando el polinomio

$$P(x,y) = \sum_{h_1=0}^{N_1-1} \sum_{h_2=0}^{N_2-1} a_{h_1 h_2}\, x^{h_1} y^{h_2}$$

Propongamos, con $N_1 > m$

$$\sum_{k=1}^{N_1} c^{(x)}_{ijk} \left(\sum_{h_1=0}^{N_1-1} \sum_{h_2=0}^{N_2-1} a_{h_1 h_2}\, x_k^{h_1} y_j^{h_2} \right) = \frac{\partial^m P\,(x_i, y_j)}{\partial x^m}$$

es decir

$$\sum_{h_1=0}^{N_1-1} \sum_{k=1}^{N_1} c^{(x)}_{ijk} \sum_{h_2=0}^{N_2-1} a_{h_1 h_2}\, y_j^{h_2} =$$

$$= \sum_{h_1=m}^{N_1-1} \sum_{h_2=0}^{N_2-1} h_1\,(h_1-1)\ldots(h_1 - m + 1)\, a_{h_1 h_2}\, x_k^{h_1-m} y_j^{h_2}$$

que podemos escribir

$$\sum_{h_1=0}^{N_1-1} \sum_{k=1}^{N_1} c^{(x)}_{ijk} x_k^{h_1} \sum_{h_2=0}^{N_2-1} a_{h_1 h_2}\, y_j^{h_2} =$$

$$= \sum_{h_1=m}^{N_1-1} h_1\,(h_1-1)\ldots(h_1 - m + 1)\, x_k^{h_1-m} \sum_{h_2=0}^{N_2-1} a_{h_1 h_2}\, y_j^{h_2}$$

y de esta igualdad se vuelve a obtener el sistema (1.2) para determinar los coeficientes c_{ijk}, los cuales resultan entonces independientes de la coordenada y_j, es decir del índice j.

Finalmente observemos que, con $N_2 > r$, es

$$\frac{\partial^{m+r}\, P\,(x_i, y_j)}{\partial y^r\, \partial x^m} = \frac{\partial^r}{\partial y^r} \sum_{k_1=1}^{N1} c^{(x)}_{ik_1}\, P\,(x_{k_1}, y_j) =$$

$$=\sum_{k_1=1}^{N_1} c^{(x)}_{ik_1} \frac{\partial^r P(x_k, y_j)}{\partial y^r} = \sum_{k_1=1}^{N_1} c^{(x)}_{ik_1} \sum_{k_2=1}^{N_2} c^{(y)}_{ik_2} P(x_{k_1}, y_{k_2})$$

Indicaremos los coeficientes c_{ik} para las derivadas de primer, segundo, tercero y cuarto orden, con

$$A_{ik}\ ,\ B_{ik}\ ,\ C_{ik} \text{ y } D_{ik}$$

respectivamente.

Puede notarse que esencialmente, este método es una técnica de colocación.

A continuación se presentan algunas aplicaciones del método.

2. PROBLEMAS ESTATICOS, DINAMICOS Y DE ESTABILIDAD ELASTICA DE VIGAS

En esta sección se presentan aplicaciones del método de cuadratura diferencial a los siguientes problemas:

- flexión de una viga de altura variable
- determinación de la carga crítica de pandeo
- vibraciones libres

2.1 **Deflexiones de una viga sometida a una carga uniformemente distribuida**

Sea la viga de sección transversal variable de la Fig. 1, con cada extremo articulado o empotrado, soportando una carga distribuida. La ecuación de la elástica es

$$E\,(I(\bar{x})\ W''(\bar{x}))'' = q(\bar{x}) \qquad (2.1)$$

sujeta a las condiciones de contorno correspondientes a los vínculos.

Supondremos

$$q(\bar{x}) = q$$

con q constante, y $b(\bar{x}) = b(0)$, $\bar{x} \in [0,L]$

$$h(x) = h\,(0) \left(\alpha \frac{\bar{x}}{L} + 1\right),\ \alpha \geq 0$$

Efectuando el cambio de variable $\bar{x} = Lx$, resulta

$$\frac{E}{L^4}\ (IW'''' + 2I'W''' + I''W'') = q \qquad (2.2)$$

o bien, dado que

$$I(x) = I(0)\ (\alpha x + 1)^3$$

es

$$(\alpha x + 1)^3\, W'''' + 6\alpha(\alpha x + 1)^2\, W''' + 6\alpha^2\,(\alpha + 1)\, W'' = \frac{qL^4}{EI(0)} \qquad (2.3)$$

Llamando

$$\mu = \frac{qL^4}{EI(0)}\quad ,\quad U = \frac{W}{\mu}$$

resulta

$$(\alpha x + 1)^3\, U'''' + 6\alpha\,(\alpha x + 1)^2\, U''' + 6\alpha^2\,(\alpha + 1)\, U'' = 1$$

Tomando como ejemplo la viga articulada-empotrada, es decir las condiciones de contorno

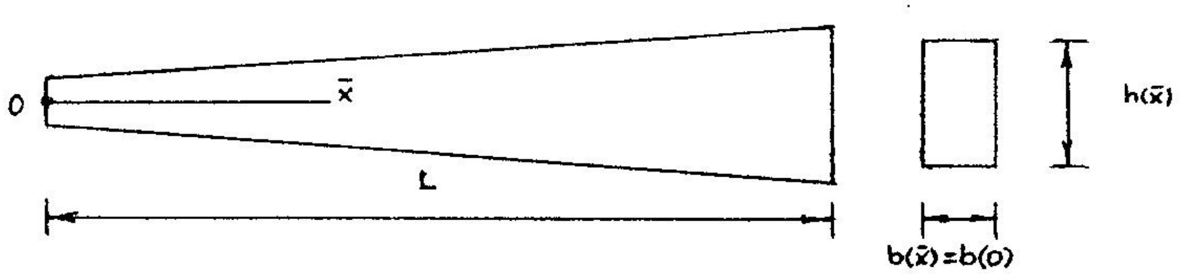

Fig. 1.- Viga de sección variable

$$U(0) = U''(0) = 0$$

$$U(1) = U'(1) = 0$$

de acuerdo con el método de cuadratura diferencial, se plantea

$$\sum_{k=2}^{N-1} B_{2k}\, U_k = 0$$

$$\sum_{k=2}^{N-1} \left((\alpha x_i + 1)^3 D_{ik} + 6\alpha\, (\alpha x_i + 1)^2 C_{ik} + 6\alpha^2 (\alpha x_i + 1)\, B_{ik} \right) U_k = 1 \qquad {\scriptstyle (i=3,\ \ldots,\ N-2)}$$

$$\sum_{k=2}^{N-1} A_{(N-1)k}\, U_k = 0$$

donde los nodos i = 2, i = N-1, se han tomado a distancia δ muy pequeña de los extremos (Fig. 2).

En la tabla 1 se muestran valores de deflexiones calculadas para distintos valores de α.

Según se acostumbra, hemos escrito el sistema anterior indicando como incógnitas los valores $U_k = U(x_k)$ que se desean aproximar, en lugar de los aproximantes $P_k = P(x_k)$.

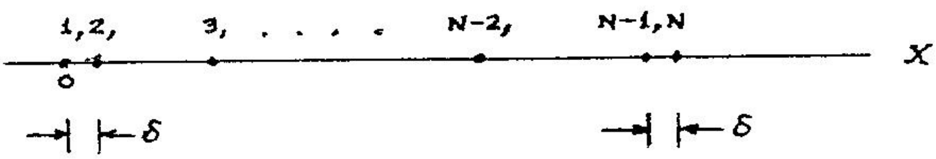

Fig. 2.- Subdivisión del intervalo [0, 1].

Tabla 1.- Deflexiones relativas U = W/ ($qL^4/EI(0)$) en función de $x = x/L$. (* N = 9, d = 10^{-4}).

	10^5U									
	Cuadratura diferencial*					Valores exactos				
α \ X	1/6	1/3	1/2	2/3	5/6	1/6	1/3	1/2	2/3	5/6
	art-art									
0	658	1131	1301	1131	658	659	1131	1302	1131	659
0,1	583	992	1126	966	557	-	-	-	-	-
0,2	522	877	983	834	476	-	-	-	-	-
0,3	469	781	866	727	412	-	-	-	-	-
	art-emp									
0	321	514	520	359	128	321	514	521	360	128
0,1	280	441	437	295	103	-	-	-	-	-
0,2	246	382	372	246	84	-	-	-	-	-
0,3	218	334	319	208	69	-	-	-	-	-
	emp-art									
0	128	359	520	514	321	128	360	521	514	321
0,1	120	327	463	448	276	-	-	-	-	-
0,2	112	299	415	395	240	-	-	-	-	-
0,3	105	275	374	350	210	-	-	-	-	-
	emp-emp									
0	80	205	260	205	80	80	206	260	206	80
0,1	73	183	225	173	65	-	-	-	-	-
0,2	67	164	196	147	54	-	-	-	-	-
0,3	62	147	172	126	45	-	-	-	-	-

2.2 Cálculo de cargas críticas

Consideremos la viga de la Fig. 3.

La ecuación diferencial de las deflexiones es

$$E\,(I\,(\bar{x})\;W''(\bar{x}))'' + PW''(\bar{x}) = 0 \qquad (2.4)$$

sujeta a las condiciones de contorno que corresponden a los vínculos. Cambiando la variable $\bar{x} = Lx$, resulta

$$(\alpha x + 1)^3\, W'''' + 6\alpha\,(\alpha x + 1)^2\, W''' +$$

$$+\; 6\alpha^2\,(ax + 1)\, W'' + \lambda W'' = 0$$

con

$$\lambda = \frac{PL^2}{EI(0)}$$

Si la viga está empotrada en ambos extremos, las condiciones de contorno son

$$W(0) = W'(0) = 0$$

$$W(1) = W'(1) = 0$$

y el sistema de ecuaciones a plantear según el método de cuadratura diferencial es

$$\sum_{k=2}^{N-1} A_{2k}\, W_k = 0$$

$$\sum_{k=2}^{N-1} ((\alpha x_i + 1)^3\, D_{ik} + 6\alpha\,(\alpha x_i + 1)^2\, C_{ik}$$

$$+\; 6\alpha^2\,(\alpha x_i + 1)\, B_{ik} + \lambda B_{ik})\, W_k = 0 \qquad {\scriptstyle (i=3,\ \ldots,\ N-2)}$$

$$\sum_{k=2}^{N-1} A_{(N-1)k}\, W_k = 0$$

y de la condición de no trivialidad del mismo se obtiene una ecuación en λ, la menor de cuyas raíces es una aproximación al autovalor que se busca.

En la tabla 2 se muestran valores de λ obtenidos con el método de cuadratura diferencial, y con el método de elementos finitos.

2.3 Vibraciones libres de una viga de sección variable y determinación de coeficientes de frecuencia

Sea nuevamente la viga de la Fig. 1. Una vez efectuado el cambio de variable $\bar{x} = Lx$, la ecuación diferencial del movimiento vibratorio transversal de la viga es

$$E(I(x)W''(x))'' - \rho A(x)\omega^2 L^4 W(x) = 0 \qquad (2.5)$$

o bien

$$(\alpha x + 1)^2\, W'''' + 6\alpha\,(\alpha x + 1)\, W''' +$$

$$+\; 6\alpha^2\, W'' - \Omega^2 W = 0$$

con

$$\Omega^2 = \frac{\rho A(0)\omega^2 L^4}{EI(0)}$$

Si la viga está articulada-empotrada, el método de cuadratura diferencial conduce al siguiente sistema de ecuaciones lineales en las incógnitas W_k

$$\sum_{k=2}^{N-1} B_{2k}\, W_k = 0$$

$$\sum_{k=2}^{N-1} ((\alpha x_i + 1)^2\, D_{ik} + 6\alpha\,(\alpha x_i + 1)\, C_{ik} +$$

$$+\; 6\alpha^2\, B_{ik})\, W_k - \Omega^2 W_i = 0 \qquad {\scriptstyle (i=3,\ \ldots,\ N-2)}$$

$$\sum_{k=2}^{N-1} A_{(N-1)k}\, W_k = 0$$

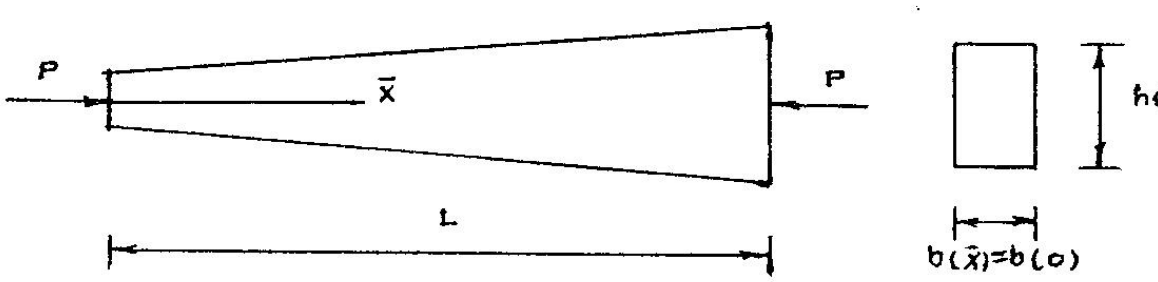

Fig. 3.- Viga de sección variable

Tabla 2.— Coeficiente de carga crítica l = $PL^2/(EI(0))$
*N = 11 nodos; ** 25 elementos, (Ref.[9]).

λ							
CUADRATURA DIFERENCIAL*				ELEMENTOS FINITOS**			EXACTO
α = 0	0,10	0,20	0,30	0,10	0,20	0,30	0
art-art							
9,874	11,399	13,015	14,716	-	-	-	9,8696
emp-art							
20,196	23,335	26,632	30,060	23,309	26,603	30,070	20,1421
art-emp							
20,196	32,304	26,612	30,116	23,305	26,595	30,055	20,1421
emp-emp							
39,532	45,603	51,968	58,661	-	-	-	39,4784

Si la viga tiene un extremo empotrado y el otro libre

$$W(0) = W'(0) = 0$$

$$W''(1) = W'''(1) = 0$$

el sistema es

$$\sum_{k=2}^{N} A_{2k} W_k = 0$$

$$\sum_{k=2}^{N} ((\alpha x_i + 1)^2 D_{ik} + 6\alpha (\alpha x_i + 1) C_{ik} + 6\alpha^2 B_{ik}) W_k - \Omega^2 W_i = 0 \quad {\scriptstyle (i=3, \ldots, N-2)}$$

$$\sum_{k=2}^{N} C_{(N-1)k} W_k = 0$$

$$\sum_{k=2}^{N} B_{Nk} W_k = 0$$

Tabla 3 (a).— Primer coeficiente de frecuencia W_1
(N = 10 nodos, $\delta = 10^{-4}$)

Ω_1					
	CUADRATURA DIFERENCIAL				EXACTO [10]
α	0	0,1	0,2	0,3	0
ART-ART	9,870	10,356	10,829	11,290	9,8696
ART-EMP	15,415	16,392	17,354	18,304	15,4181
EMP-ART	15,415	15,968	16,509	17,038	15,4181
EMP-EMP	22,368	23,478	24,517	25,649	22,3732
EMP-LIB	3,517	3,479	3,448	3,421	3,5160
LIB-EMP	3 ,517	3,911	4,312	4,716	3,5160

Tabla 3 (b).— primer coeficiente de frecuencia W_1
(40 elementos.)

	Ω_1			
	ELEMENTOS FINITOS [9]			
α	0	0,1	0,2	0,3
ART-ART	9,869	10,355	10,826	11,285
ART-EMP	15,418	16,420	17,406	18,378
EMP-ART	15,418	15,997	16,561	17,019
EMP-EMP	22,373	23,521	24,647	25,754
EMP-LIB	3,516	3,485	3,458	3,435
LIB-EMP	3,516	3,916	4,322	4,733

Tabla 4 (a).— Segundo coeficiente de frecuencia W_2
($N = 13$ nodos, $\delta = 10^{-4}$

	Ω_2				
	CUADRATURA DIFERENCIAL				EXACTO [10]
α	0	0,1	0,2	0,3	0
ART-ART	39,501	41,454	43,368	45,251	39,478
ART-EMP	50,017	52,677	55,280	57,841	49,964
EMP-ART	50,017	52,290	54,501	56,663	49,964
EMP-EMP	61,751	64,794	67,757	70,657	61,673
EMP-LIB	22,044	22,724	23,386	24,032	22,034
LIB-EMP	22,044	23,552	25,044	26,526	22,034

Tabla 4 (b).— Segundo coeficiente de frecuencia W_2
(40 elementos.)

	Ω_2			
	ELEMENTOS FINITOS [9]			
α	0	0,1	0,2	0,3
ART-ART	39,478	41,434	43,356	45,249
ART-EMP	49,964	52,728	55,445	58,120
EMP-ART	49,964	52,332	54,651	56,929
EMP-EMP	61,672	64,837	67,937	70,981
EMP-LIB	22,034	22,754	23,457	24,144
LIB-EMP	22,034	23,583	25,117	26,639

Tabla 5 (a).— Tercer coeficiente de frecuencia W_3
(N = 16 nodos, $\delta = 10^{-4}$).

	3				
	CUADRATURA DIFERENCIAL				EXACTO [10]
α	0	0,1	0,2	0,3	0
ART-ART	88,806	93,210	97,550	101,774	88,826
ART-EMP	104,237	109,694	115,017	120,206	104,248
EMP-ART	104,237	109,083	114,052	118,866	104,248
EMP-EMP	120,854	126,852	132,742	138,695	120,903
EMP-LIB	61,758	64,438	66,938	69,563	61,697
LIB-EMP	61,758	65,212	68,601	71,952	61,697

Tabla 5 (b).— Tercer coeficiente de frecuencia W_3
(40 elementos)

	Ω_3			
	ELEMENTOS FINITOS [9]			
α	0	0,1	0,2	0,3
ART-ART	88,826	93,222	97,534	101,773
ART-EMP	104,248	109,795	115,238	120,591
EMP-ART	104,248	109,401	114,450	119,407
EMP-EMP	120,903	127,105	133,180	139,143
EMP-LIB	61,697	64,471	67,192	69,866
LIB-EMP	61,697	65,266	68,784	72,258

En las tablas 3 a 5 figuran valores de los tres primeros coeficientes de frecuencia calculados con el método de cuadratura diferencial, y con el método de elementos finitos (Ref.[9]).

Se puede observar una muy satisfactoria concordancia entre los valores que resultan del empleo de ambos métodos.

3. CONCLUSIONES

Si bien el método expuesto no es de alcances tan generales como otras herramientas de cáculo de la mecánica computacional: el método de elementos finitos, el de elementos de contorno o la técnica de diferencias finitas, es evidente que posee ciertas ventajas ya que puede ser implementado rápida y fácilmente en una computadora digital.

AGRADECIMIENTOS

El presente estudio ha sido auspiciado por el CONICET (PID 1992-1994).

REFERENCIAS

1. BELLMAN, R. and Casti, J. Differential quadrature and long-term integration. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 34, 235-238 (1971).
2. MINGLE, J. O. Computational considerations in non-linear diffusion. International Journal for Numerical Methods in Engineering Vol. 7, 103-116 (1973).

3. MINGLE, J. O. The method of differential quadrature for transient non-linear diffusion. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 60,559-569(1977).
4. FARUK CIVAN and SLIEPCEVICH, C. M. Differential quadrature for multi-dimensional problems. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 101,423-443 (1984).
5. STRIZ, A. G., JANG, S.K. and STRIZ, A.G. Non linear bending analysis of thin circular plates by differential quadrature. Thin-Walled Structures (1989) 6,51-62.
6. BERT, C.W., JANG, S.K. and STRIZ, A.G. Nonlinear bending analysis of orthotropic rectangular plates by the method of differential quadrature. Computational Mechanics (1989) 5, 217-226.
7. JANG, S.K., BERT, C. W. and STRIZ, A.G. Application of differential quadrature to static analysis of structural components. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 28, 561-577 (1989).
8. KUKRETI, A. R., FARSA, F. and BERT, C.W. Fundamental frequency of tapered plates by differential quadrature. Journal of Engineering Mechanics Vol. 118, N 6, June 1992, 1221-1238.
9. GUTIERREZ, R. H., LAURA, P.A.A. andROSSI, R.E. The method of differential quadrature and its application to the approximate solution of ocean engineering problems. Ocean Engng., Vol. 19, 1993.
10. BLEVINS, R. D. Formulas for natural frequency and mode shape. Van Nostrand Reinhold Company, 1979.

Manuscrito recibido en Marzo de 1993